In the Name of God

DYNAMICS

[Course No. 8102128]

Dr. Mehdi Ghassemieh

m.ghassemieh@ut.ac.ir

Tel. 6111-2273

Fax. 6640-3808

پردیس دانشکده های فنی

University College of Engineering

بنام خدا

دینامیک (نیمسال ۲-۹۷-۹۶)

شماره درس ۸۱۰۲۱۲۸

دکتر مهدی قاسمیه

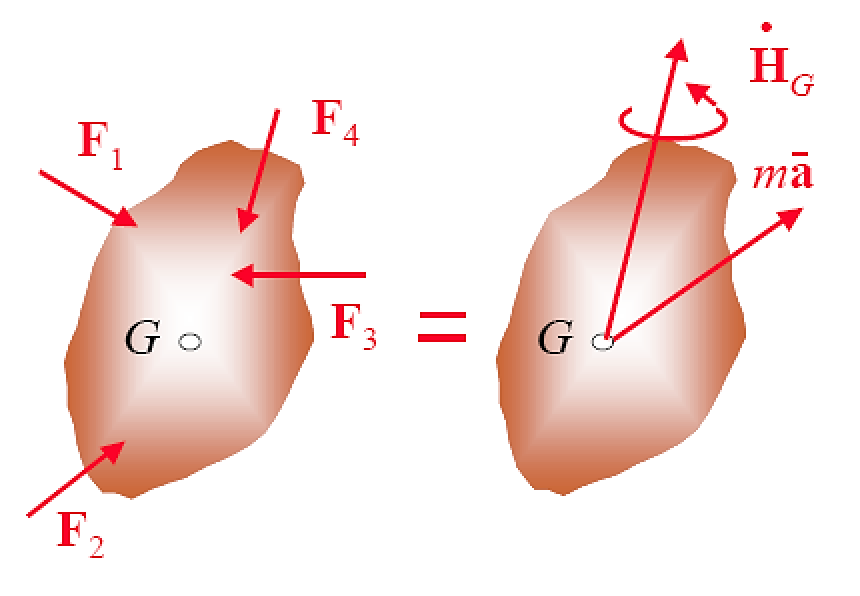
دانشکده مهندسی عمران

فصل ششم :

PLANE MOTION OF
RIGID BODIES
FORCES AND ACCELERATION

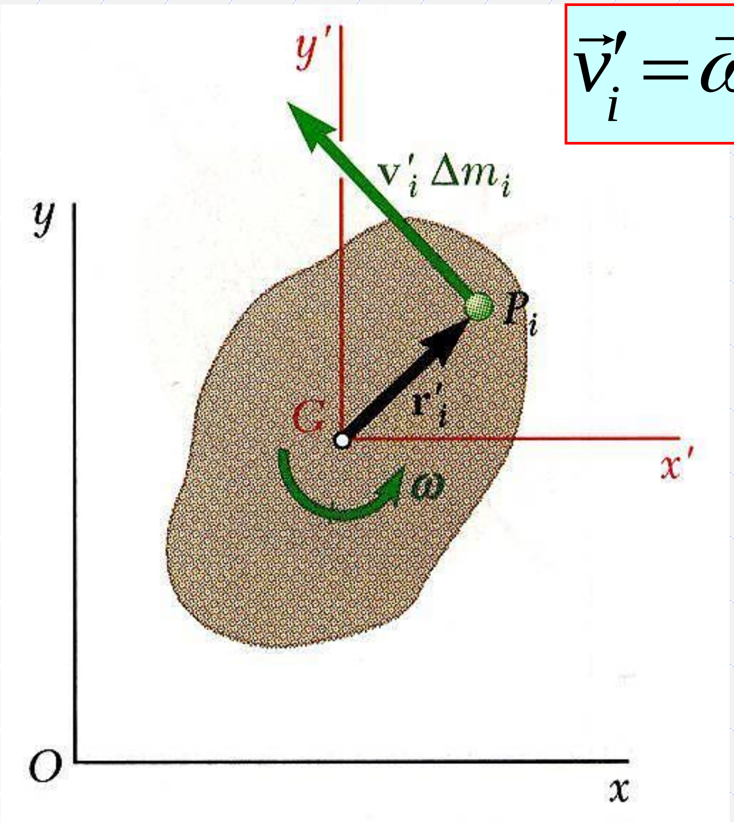
حرکت صفحه ای اجسام صلب : نیرو ها و شتاب

در این فصل به سینتیک اجسام صلب صفحه ای می پردازیم. روابط موجود میان نیروهای وارد بر یک جسم صلب ، شکل و جرم جسم و حرکت حاصل را مطالعه می کنیم. از روابطی که در گذشته فراگرفتیم استفاده می کنیم.



$$\Sigma \overrightarrow{F} = \dot{\vec{L}} = m\vec{\bar{a}}$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$$



$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}' \Delta m_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i{}' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}' \right) \Delta m_i \right]$$

$$= \vec{\omega} \sum \left(r_i{}'^2 \Delta m_i \right)$$

$$= \bar{I} \vec{\omega}$$

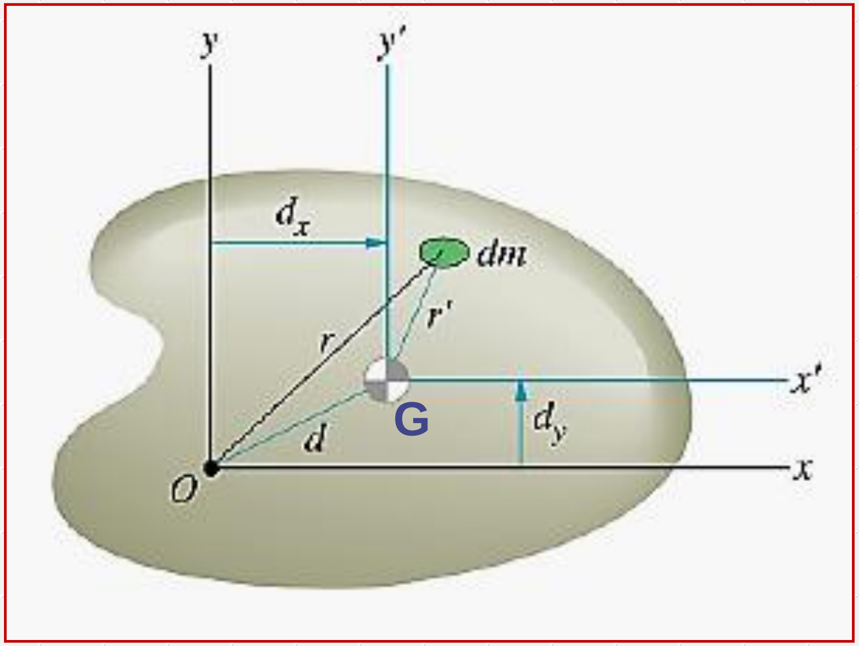
$$\dot{\vec{H}}_G = \bar{I} \dot{\vec{\omega}} = \bar{I} \vec{\alpha}$$

$I_y = \int x^2\, dA$ (گشتاور ثانویه سطح)

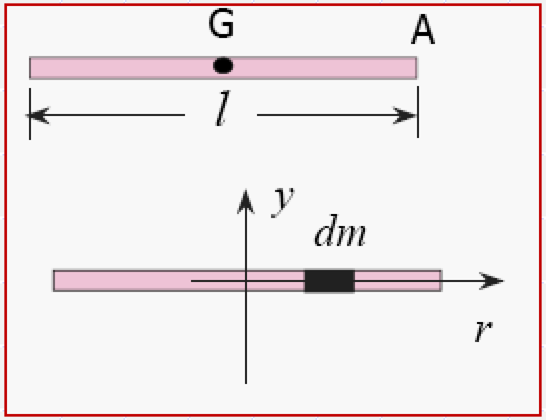
$I_m = \int r^2\, dm = \rho t I_A$ (ممان اینرسی جرم)

$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

$$I_\circ = \bar{I} + d^2 m$$

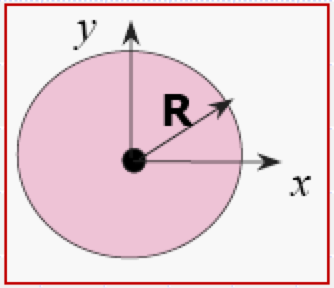


$$I = \int_m r^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \rho A dr = \frac{1}{12}\rho A l^3 = \frac{l^2}{12} m$$



$$I_{(x-axis)} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_{(x-axis)} = I_{(y-axis)} = \frac{1}{4} m R^2$$



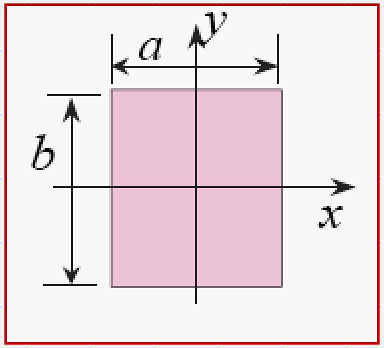
h = ضخامت

$$m = \pi \rho h R^2$$

$$I_{(x-axis)} = \frac{1}{12} m a^2$$

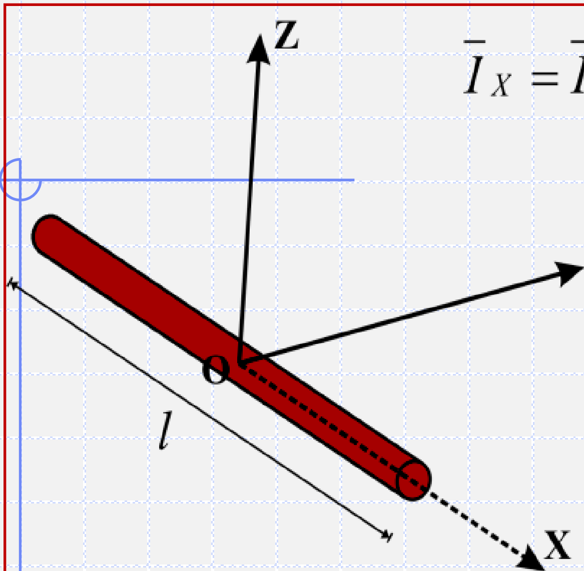
$$I_{(y-axis)} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$m = hab$$



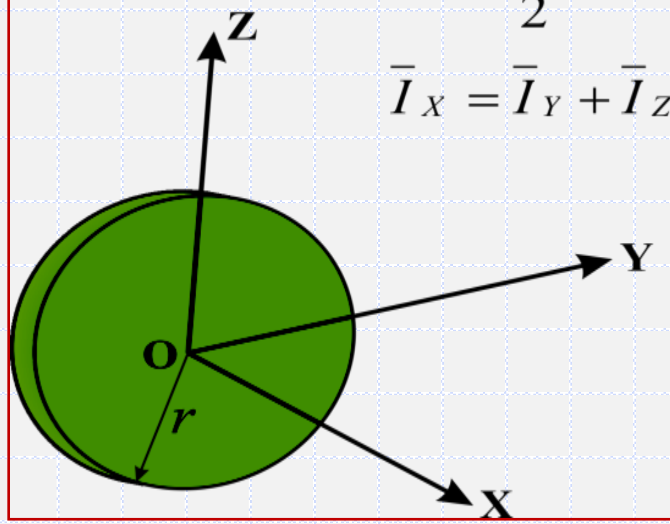
ممان اینرسی جرمی چند جسم ساده :

$$\bar{I}_X = \bar{I}_Y = \frac{1}{12} m l^2$$

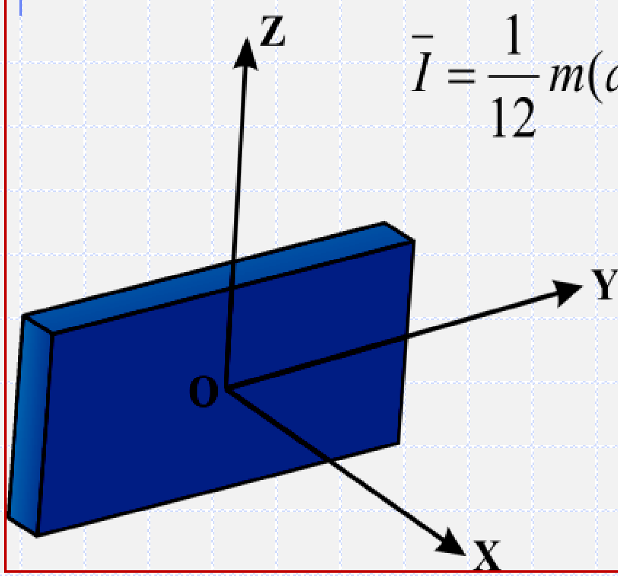


$$\bar{I}_X = \frac{1}{2} m r^2$$

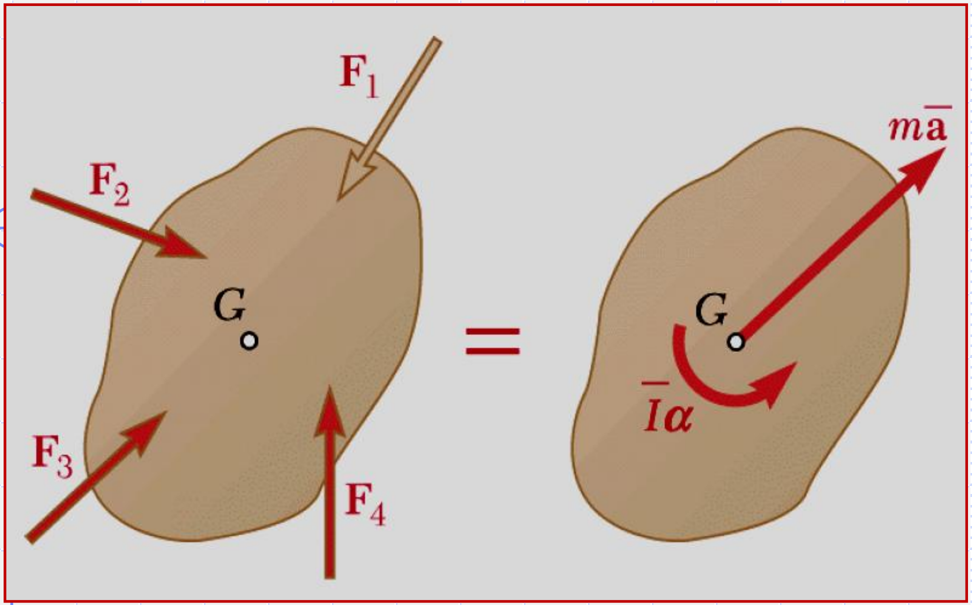
$$\bar{I}_X = \bar{I}_Y + \bar{I}_Z$$



$$\bar{I} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$



اصل دالامبر :



$$\Sigma \vec{F} = \dot{\vec{L}} = m\vec{\bar{a}}$$

$$\Sigma M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\,\alpha$$

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma\left(\vec{F}\right)_{eff}$$

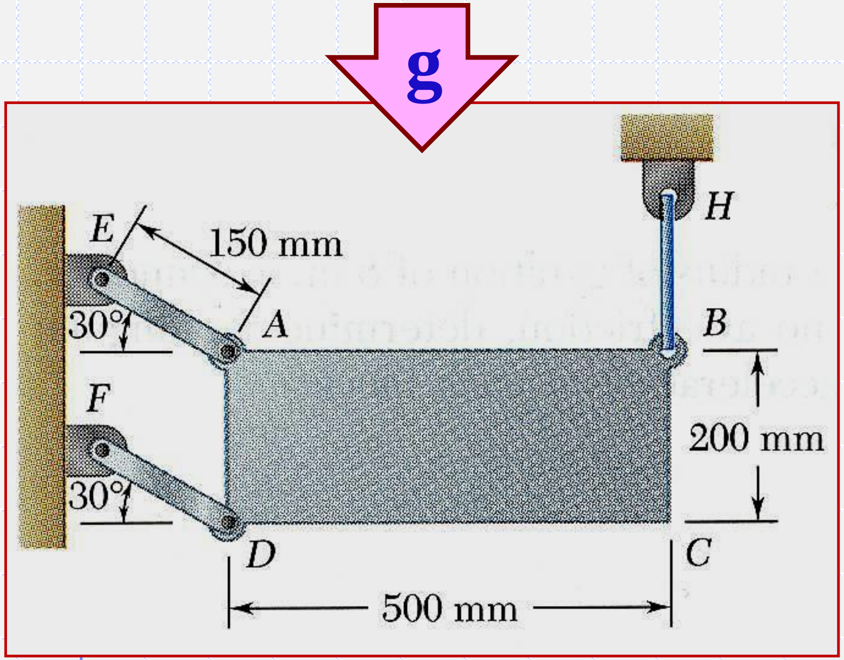
$$\Sigma M_G = \Sigma\left(M_G\right)_{eff}$$

حالات خاص حرکت

۱) حرکت فقط انتقالی $(\alpha=0)$ $\quad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0 \quad , \quad \Sigma F = m\bar{a}$

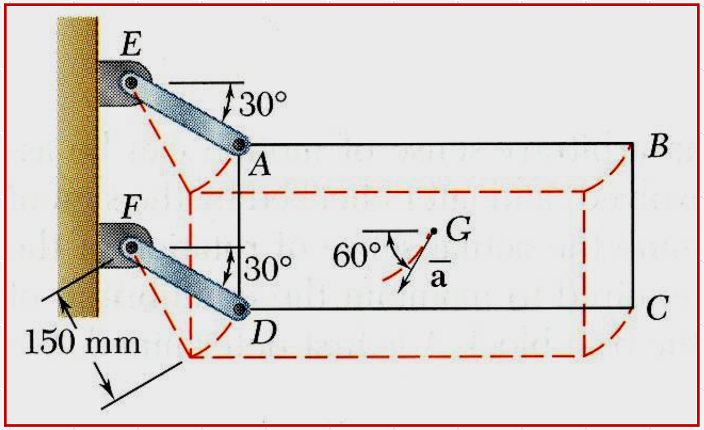
۲) حرکت فقط دورانی $(\bar{a}=0)$ $\quad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \quad , \quad \Sigma F = m\bar{a} = 0$

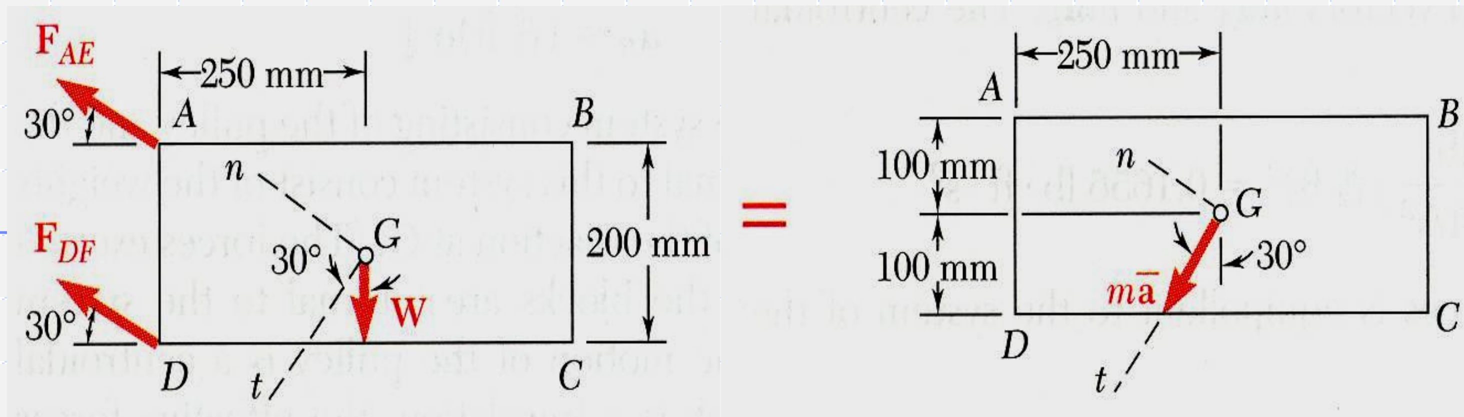
مثال: در صفحه قائم، در صورتی که کابل BH قطع شود، مطلوبست : شتاب ورق و نیرو در لینک های مقابل در لحظه قطع شدن کابل.



جرم ورق مستطیلی شکل برابر 8 کیلوگرم است و از جرم لینکها صرفنظر شده است.

حل:



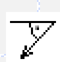


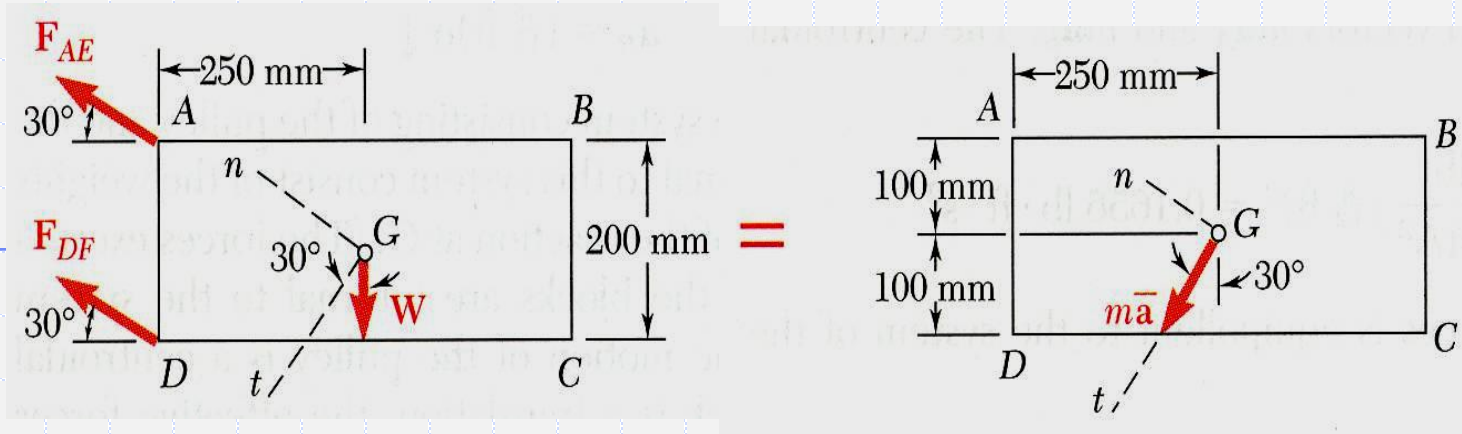
$$\swarrow \sum F_t = \swarrow \sum (F_t)_{eff}$$

$$w \cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$mg \cos 30^\circ = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = (9.81)\cos 30^\circ$$

$$\bar{a} = 8.50 \ \mathrm{m/s^2}$$

 **60º**



$+\circlearrowleft \quad \sum M_G = \left(\sum M_G\right)_{eff}$

$$\Rightarrow \left(F_{AE}\sin 30°\right)(250\,\text{mm}) - \left(F_{AE}\cos 30°\right)(100\,\text{mm})$$
$$\left(F_{DF}\sin 30°\right)(250\,\text{mm}) + \left(F_{DF}\cos 30°\right)(100\,\text{mm}) = 0$$

$$38.4F_{AE} + 211.6F_{DF} = 0$$
$$F_{DF} = -0.1815F_{AE}$$

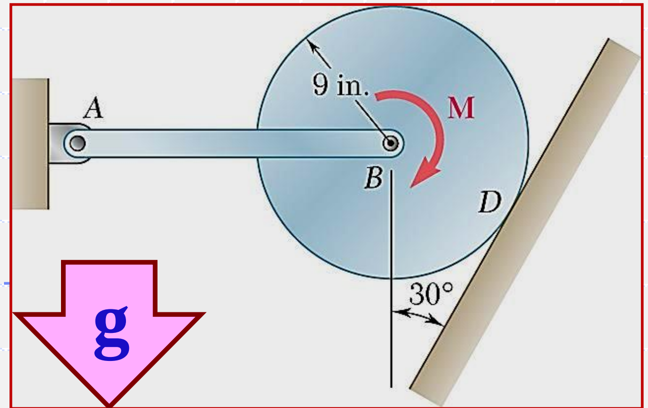
$+\nwarrow \quad \sum F_n = \sum \left(F_n\right)_{eff}$

$$F_{AE} + F_{DF} - W\sin 30° = 0$$
$$F_{AE} - 0.1815F_{AE} - W\sin 30° = 0$$
$$F_{AE} = 0.619(8\,\text{kg})\left(9.81\,\text{m/s}^2\right)$$

$$F_{DF} = -0.1815(47.9\,\text{N})$$

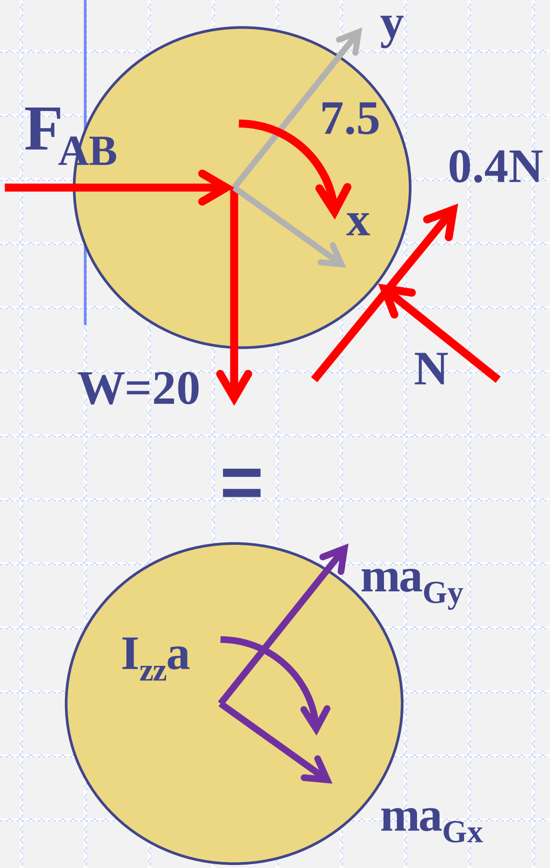
$$F_{AE} = 47.9\,\text{N} \quad T$$

$$F_{DF} = 8.70\,\text{N} \quad C$$



مثال: در صفحه قائم، دیسک با لنگر ثابت 7.5 lb.ft در روی سطح شیب دار قرار دارد. این سطح شیبدار دارای اصطکاک با ضریب 0.4 میباشد. مطلوبست : شتاب زاویه ای دیسک و نیرو در لینک. وزن دیسک 20 پوند است و از جرم لینک صرف نظر شده است.

حل:



$$\sum F_x = ma_{Gx} \Rightarrow -N + F_{AB}\cos 30^\circ + 20\sin 30^\circ = (\frac{20}{g})0$$

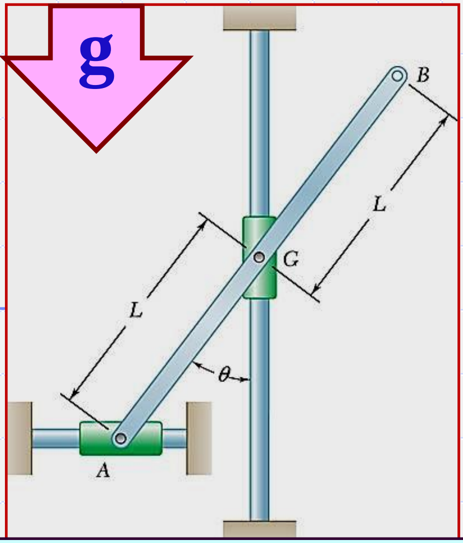
$$-N + 0.866F_{AB} = -10$$

$$\sum F_Y = ma_{Gy} \Rightarrow 0.4N + F_{AB}\sin 30^\circ - 20\cos 30^\circ = (\frac{20}{g})0$$

$$0.4N + 0.5F_{AB} = 15.68 \Rightarrow N = 23.67(Ib), F_{AB} = 15.68(Ib)$$

$$\sum M_G = I_{zz}\alpha \Rightarrow -7.5 + (\frac{9}{12})9.46 = (\frac{1}{2})(\frac{20}{g})(\frac{9}{12})^2\alpha$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2, \Rightarrow \alpha = -2.32\, {}^{rad}/_{s^2}$$



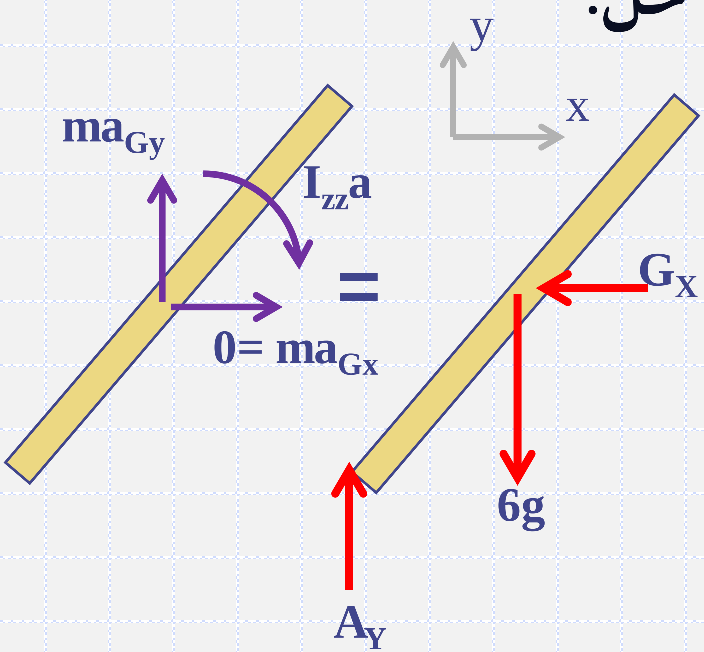
مثال: در صفحه قائم، اگر میله که زاویه 30 درجه با محور قائم دارد از حالت ساکن رها شود، مطلوبست : شتاب زاویه ای میله و نیروی وارده از طوقه A به میله. جرم میله 6 کیلوگرم و طول 2L=0.6 (m) است و از جرم طوقه ها صرف نظر شده است.

حل:

$$\sum M_G = I_G\alpha \Rightarrow -A_y(0.3\sin 30^\circ) = (\frac{1}{12})6(0.6)^2\alpha$$

$$\sum F_x = ma_{Gx} \Rightarrow -G_x = 6(0) \rightarrow G_x = 0$$

$$\sum F_y = ma_{Gy} \Rightarrow A_y - 6g = 6a_{Gy}$$



$$a_G = a_A + \alpha \times r_{G/A} + \omega \times (\omega \times r_{G/A})$$

$$a_{Gy} j = a_A i + \alpha k \times 0.3(\sin 30^\circ i + \cos 30^\circ j) - 0^2 r_{G/A}$$

$$a_{Gy} j = a_A i + 0.15\alpha j - 0.26\alpha i$$

$$j \rightarrow a_{Gy} = 0.15\alpha$$

$$A_y - 6g = 0.9\alpha$$

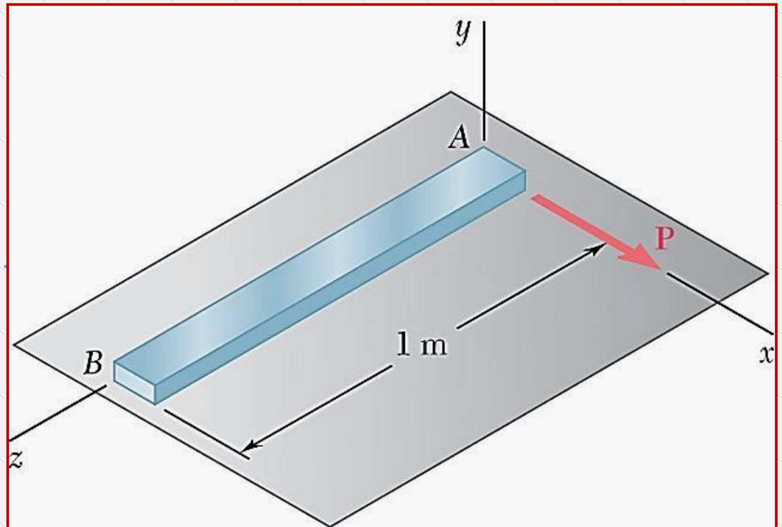
$$-0.15A_y = 0.18\alpha$$

$$\alpha = -28.03 \, {}^{rad}\!/_{s^2}$$

$$A_y = 36.6N$$

مثال: در صفحه افقی بدون اصطکاک، در صورتی که نیروی P به میله در نقطه A وارد شود، مطلوبست : شتاب نقاط A و B.

جرم میله 3 کیلوگرم است و P= 2 N .



حل:

$$\sum F_x = ma_{Gx} \Rightarrow 2 = 3a_{Gx}$$

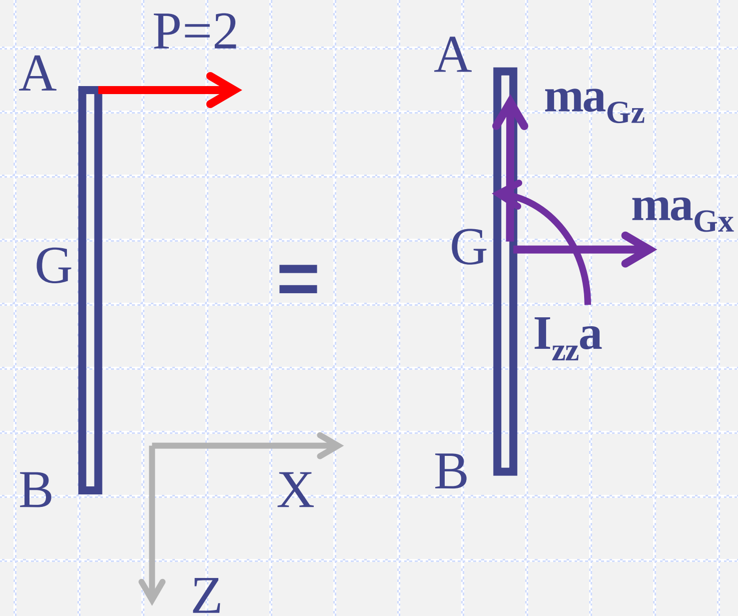
$$a_{Gx} = 0.667\, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\sum F_y = ma_{Gz} \Rightarrow 0 = 3a_{Gz}$$

$$a_{Gz} = 0\, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\sum M_{Gy} = I_{yyG} \Rightarrow -2(0.5) = (\frac{1}{12})(3)1^2\alpha$$

$$\alpha = -4\, {}^{rad}\!/_{s^2}$$



$$a_A = a_G + \alpha j \times r_{G/A} - \omega^2 r_{A/G}$$

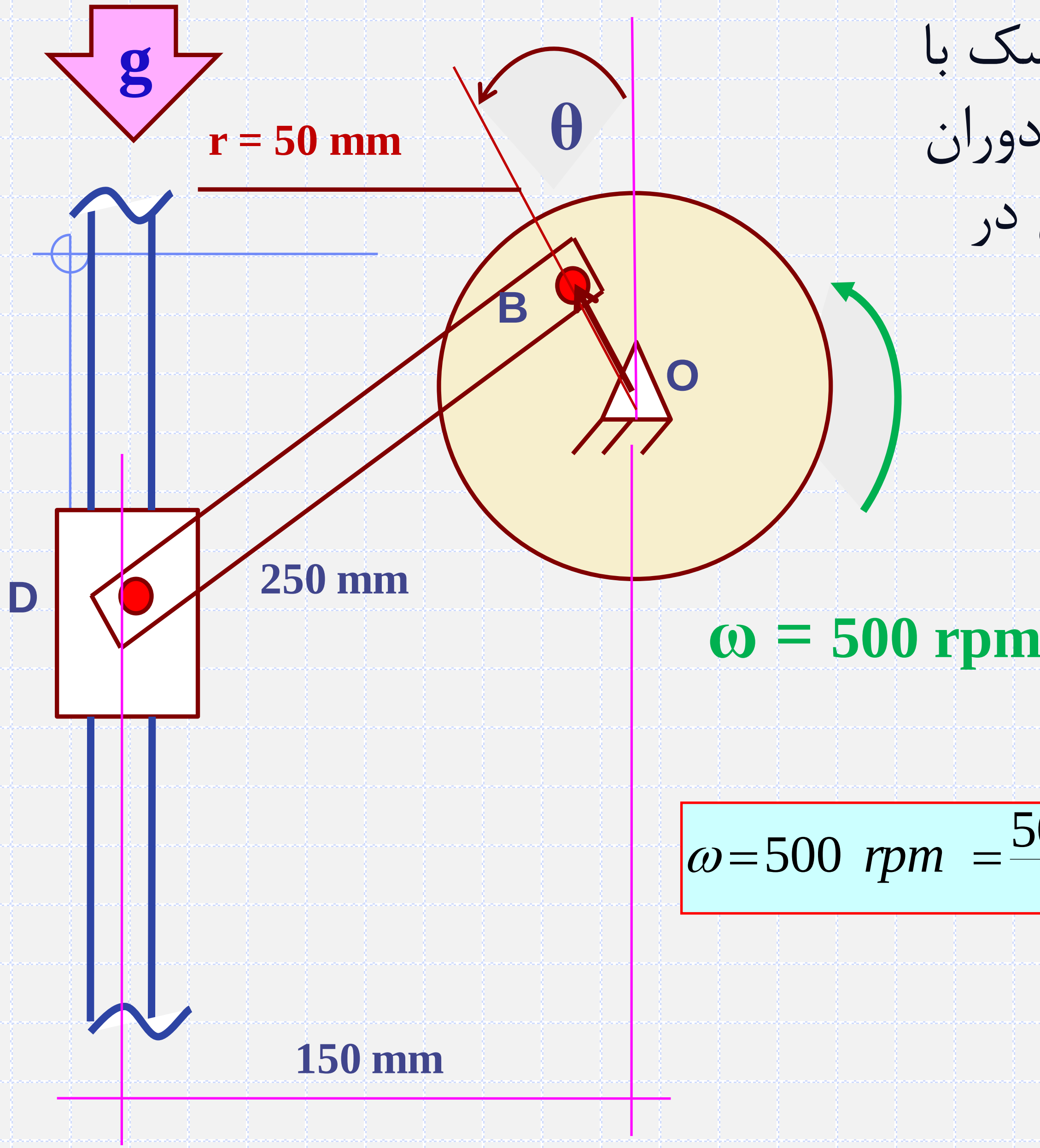
$$a_A = 0.667i - 4j \times -0.5k - 0^2(-0.5j)$$

$$a_A = 2.667 \, {}^{m}\!/_{s^2} \quad \rightarrow$$

$$a_B = 0.667i - 4j \times 0.5k - 0^2(0.5j)$$

$$a_B = 1.333 \, {}^{m}\!/_{s^2} \quad \leftarrow$$

مثال : در صفحه قائم اگر دیسک با سرعت زاویه ای ثابت درحال دوران باشد، مطلوبست: عکس العمل در طوقه **D** در حالت $\theta = 0°$

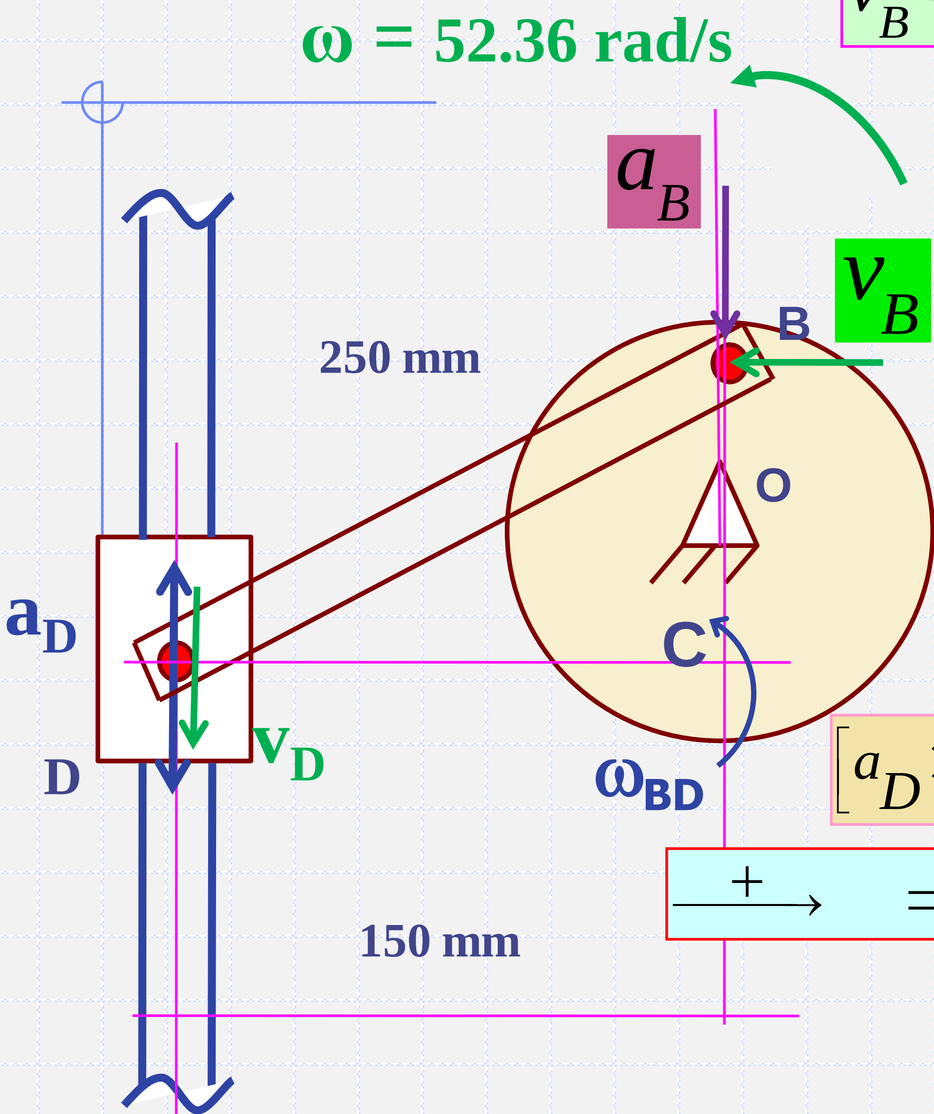


$$m_{DB} = 5 \text{ kg}$$

حل:

$$\boxed{\omega = 500 \;\; rpm \;\; = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52.36 \;\; {rad}/{s}}$$

$\theta = 0°$



$$v_B = (0.05)(52.96) = 2.62 \leftarrow \; {}^{m}\!/\!_{s}$$

$$a_B = (0.05)(52.36)^2 = 137.1 \downarrow \; {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

$$v_D = 0.15\,\omega_{BD}$$

$$v_B = 0.20\,\omega_{BD} = 2.62$$

$$\omega_{BD} = 13.1 \; {}^{\text{rad}}\!/\!_{\text{s}}$$

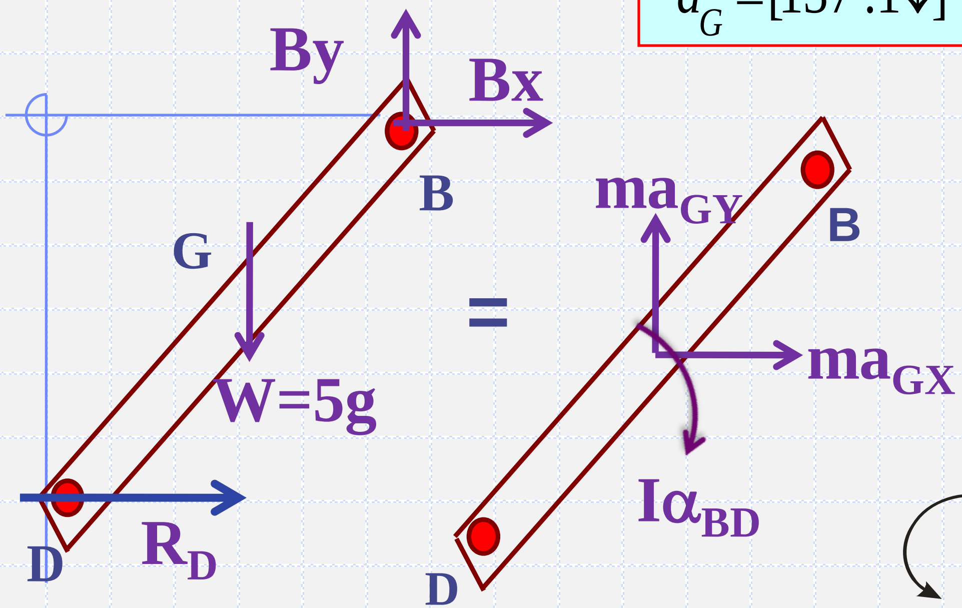
$$\left[a_D \updownarrow\right] = \left[137.1 \downarrow\right] + \left[0.25(13.1)^2 \nearrow\right] + \left[0.25(\alpha) \nwarrow\!\searrow\right]$$

$$\xrightarrow{+} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + 0.25(13.1)^2(3.5) - (0.25)\alpha(4.5)$$

$$\alpha = 128.7 \; (rad/s^2)$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{a}_{G/B}$$

$$\vec{a}_G = [137.1\downarrow] + [0.125\ (13.1)^2 \nearrow] + [0.125\ (128.7) \nwarrow]$$



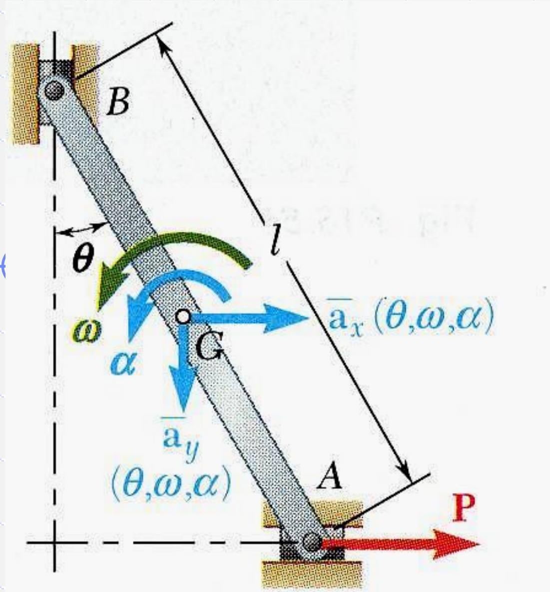
$$\vec{a} = 110.3\,(m/s^2)\downarrow$$

$$\sum M_B = \left(\sum M_B\right)_{eff}$$

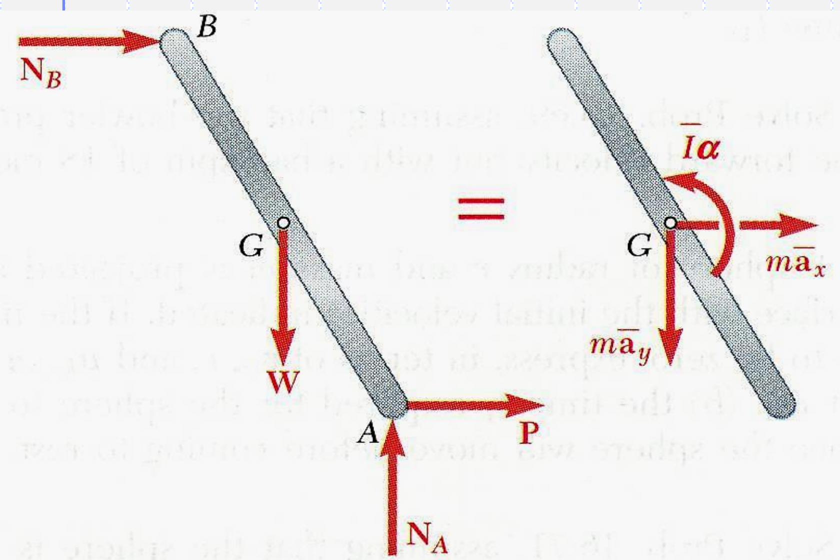
$$R_D(0.2) + 5g\left(\frac{0.15}{2}\right) = 5(110.3)\left(\frac{0.15}{2}\right) + \frac{1}{12}md^2(-128.52)$$

$$\Rightarrow R_D = 171.7(N)\rightarrow$$

حرکت مقید در صفحه



در بیشتر کاربردهای مهندسی اجسام صلبی داریم که تحت قیدهای معینی حرکت می کنند. در این حالت بین مولفه های شتاب و مرکز جرم جسم و شتاب زاویه ای آن روابط معینی وجود دارد. به چنین حرکتی حرکت مقید می گوییم.

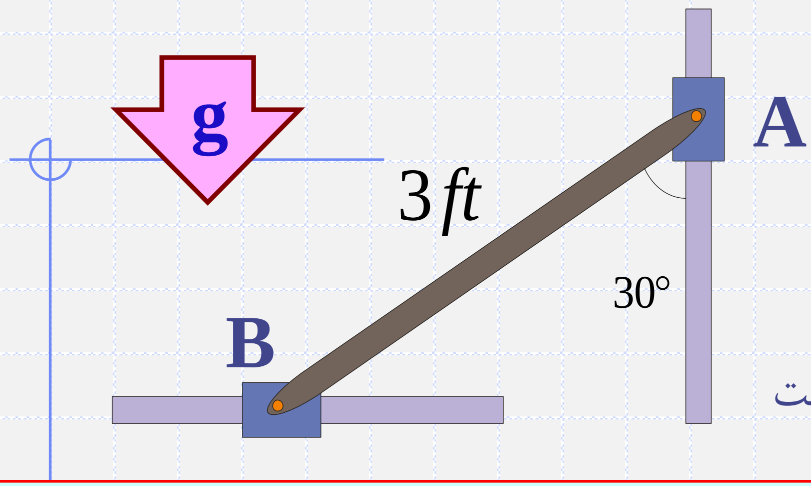


$$\begin{cases} \Sigma f_x = (\Sigma f_x)_{eff} \\ \Sigma f_y = (\Sigma f_y)_{eff} \\ \Sigma M = (\Sigma M)_{eff} \end{cases}$$

$$m\bar{a}_x = m\,f(\alpha)$$
$$m\bar{a}_y = m\,g(\alpha)$$

مثال: اگر سیستم فوق در صفحه قائم از حالت سکون رها شود،

مطلوبست: $R_A=?\quad R_B=?\quad \alpha_{AB}=?$



$$W_{AB}=8\,lb$$

حل:

فرض می کنیم که جهت شتاب زاویه ای ساعتگرد است

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_B+\left(\vec{a}_{A/B}\right)_n+\left(\vec{a}_{A/B}\right)_t$$

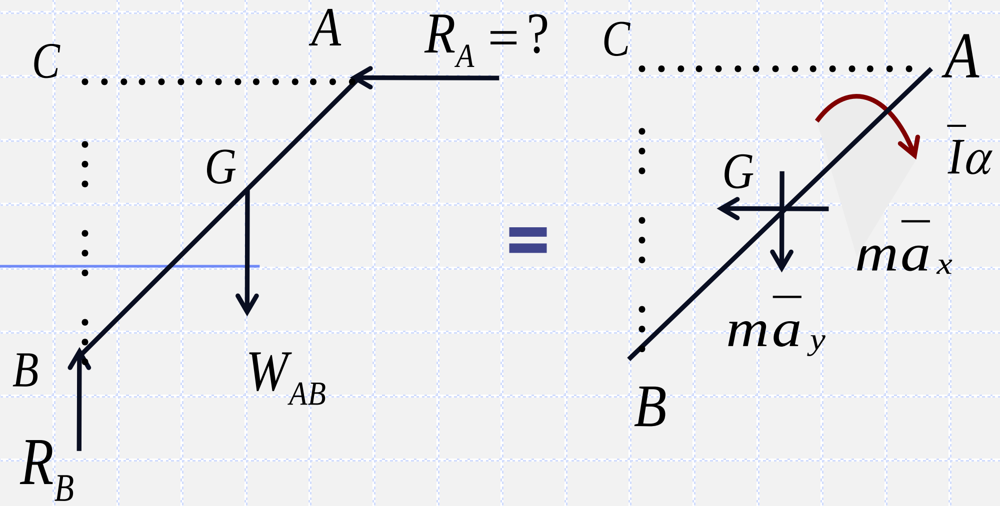
$$[a_A\downarrow]=[a_B\leftarrow]+[3\alpha\searrow]+0$$

$$\xrightarrow{+}\qquad 0=-a_B+3\alpha\,Cos30\quad\Rightarrow\quad a_B=2.6\alpha$$

$$\vec{a}_G=\vec{a}_B+\vec{a}_{G/B}=\left[a_B\leftarrow\right]+\left[1.5\alpha\searrow\right]$$

$$\bar{a}_x=-a_B+1.5\alpha\cos30=-2.6\alpha+1.3\alpha=\left[1.3\alpha\leftarrow\right]\quad\Rightarrow\quad m\bar{a}_x=\frac{8}{g}\left(1.3\alpha\right)$$

$$\bar{a}_y=1.5\alpha\,Sin30=\left[0.75\alpha\downarrow\right]\quad\Rightarrow\quad m\bar{a}_y=\frac{8}{g}\left(0.75\alpha\right)$$



$$\Sigma M_C = (\Sigma M_C)_{eff}$$

$$8\left(\frac{3}{2}\sin 30\right) = \bar{I}\alpha + \frac{8}{g}(1.3\alpha)\left(\frac{l}{2}\sin 30\right) + \frac{8}{g}(0.75\alpha)\left(\frac{l}{2}\cos 30\right)$$

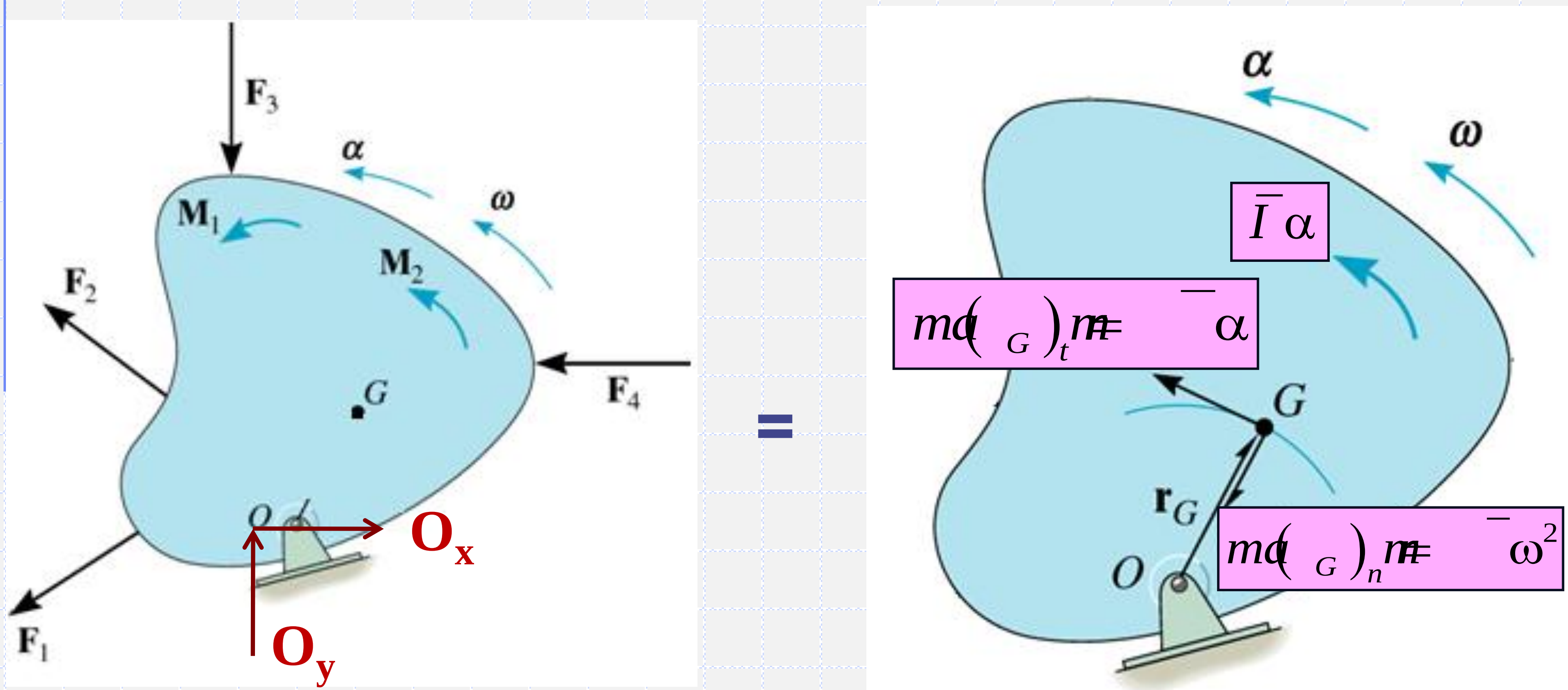
$$\alpha = 8.05\ {rad}/{s^2} \downarrow \ , \quad \bar{a}_x = 10.44\ ({ft}/{s^2}) \leftarrow \ , \quad \bar{a}_y = 4.04\ ({ft}/{s^2}) \downarrow$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma f_x = (\Sigma f_x)_{eff} \quad \Rightarrow \quad -R_A = -m\bar{a}_x \quad \Rightarrow \quad R_A = 2.6\ (lb) \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma f_y = (\Sigma f_y)_{eff} \quad \Rightarrow \quad R_B - W_{AB} = -m\bar{a}_y \quad \Rightarrow \quad R_B = 6.5\ (lb) \uparrow$$

حرکت دورانی حول نقطه‌ای غیر از مرکز جرم

این حرکت جسم صلبی است که مقید است حول محور ثابتی که از مرکز جرم آن عبور نمی کند دوران کند.

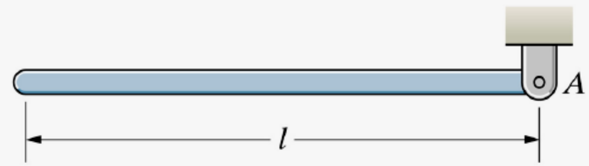


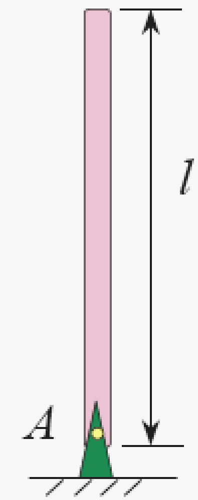
$$(\sum M_O) = (\sum M_O)_{eff} \quad \Rightarrow \quad (\sum M_O) = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\,\alpha$$

$$\sum M_O = I_O \alpha$$

$$I_G = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_A = \frac{1}{3} m l^2$$



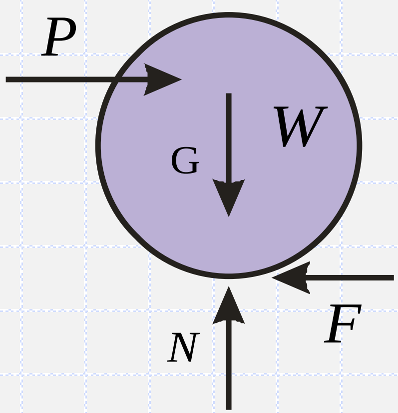


$$I_A = I + d^2 m = \frac{1}{12} m l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m = \frac{1}{3} m l^2$$

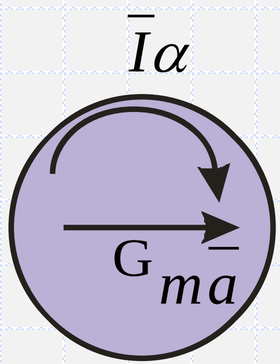
حرکت چرخشی دیسک یا چرخ روی سطح صاف

۱) حرکت چرخشی بدون لغزش:

اگر دیسک مقید باشد که غلتش بدون لغزش انجام بدهد، شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه ای آن مستقل از هم نیستند . وقتی دیسک بدون لغزش می غلتد، حرکت نسبی بین نقطه تماس دیسک با زمین و خود زمین وجود ندارد. بنابراین تا آنجا که به محاسبه ی نیروی اصطکاک F مربوط می شود، می توان دیسک در حال چرخش را با قطعه ای که روی سطحی در حال سکون قرار دارد یکی دانست.



=



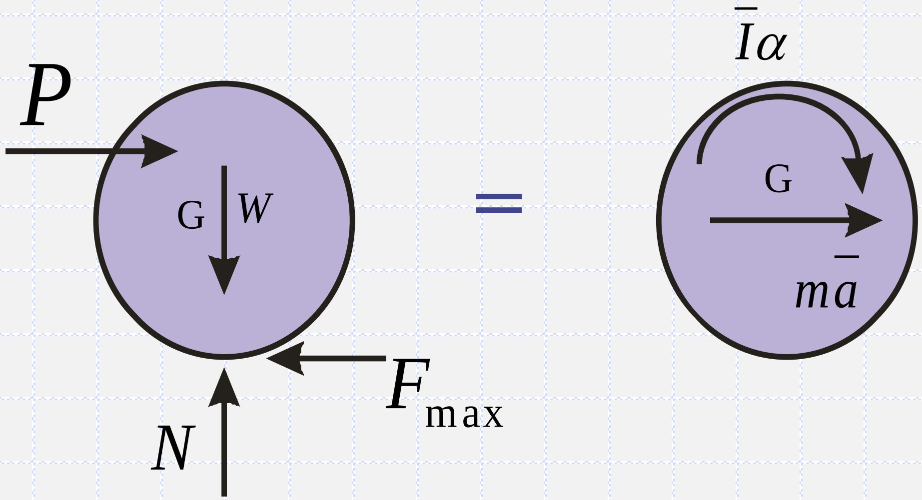
$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\,\theta \\ \bar{v} &= r\,\omega \\ \bar{a} &= r\,\alpha \end{aligned}}$$

$$\boxed{F < F_{max} = \mu_s N}$$

$\mu_s =$ ضریب اصطکاک استاتیک

۲) حرکت چرخشی در آستانه لغزش :

در آستانه لغزش هنوز لغزشی اتفاق نیفتاده ، در نتیجه شتاب مانند حالت قبل با شتاب زاویه ای در ارتباط است.



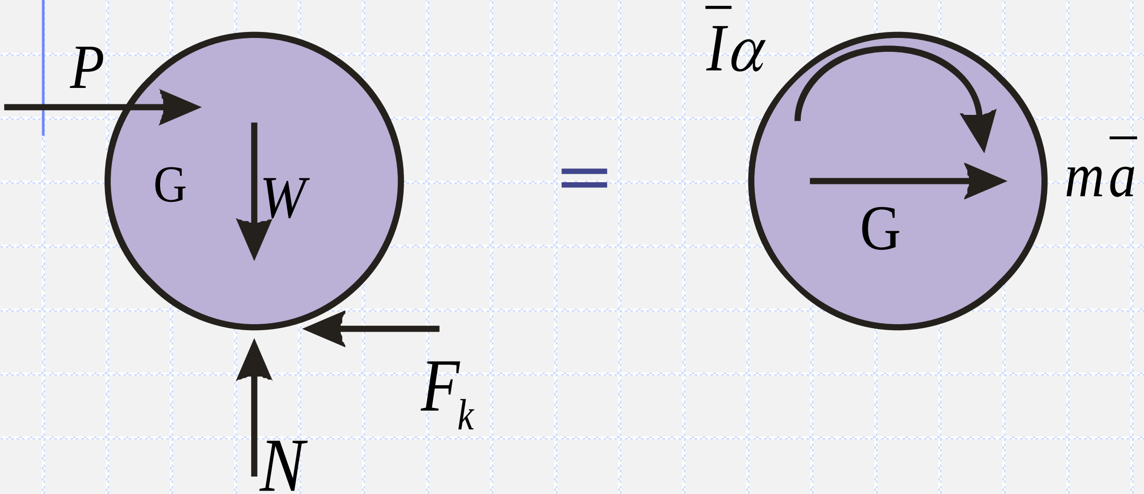
$$\boxed{\bar{a} = r\alpha}$$

$$\boxed{F = F_{max} = \mu_s N}$$

۳) حرکت چرخشی به همراه لغزش:

وقتی چرخش توام با لغزش بین نقاط تماس دیسک با زمین و خود زمین حرکت نسبی وجود دارد، نیروی اصطکاک برابر است با $F_k = \mu_k N$

ضریب اصطکاک دینامیکی $= \mu_k$

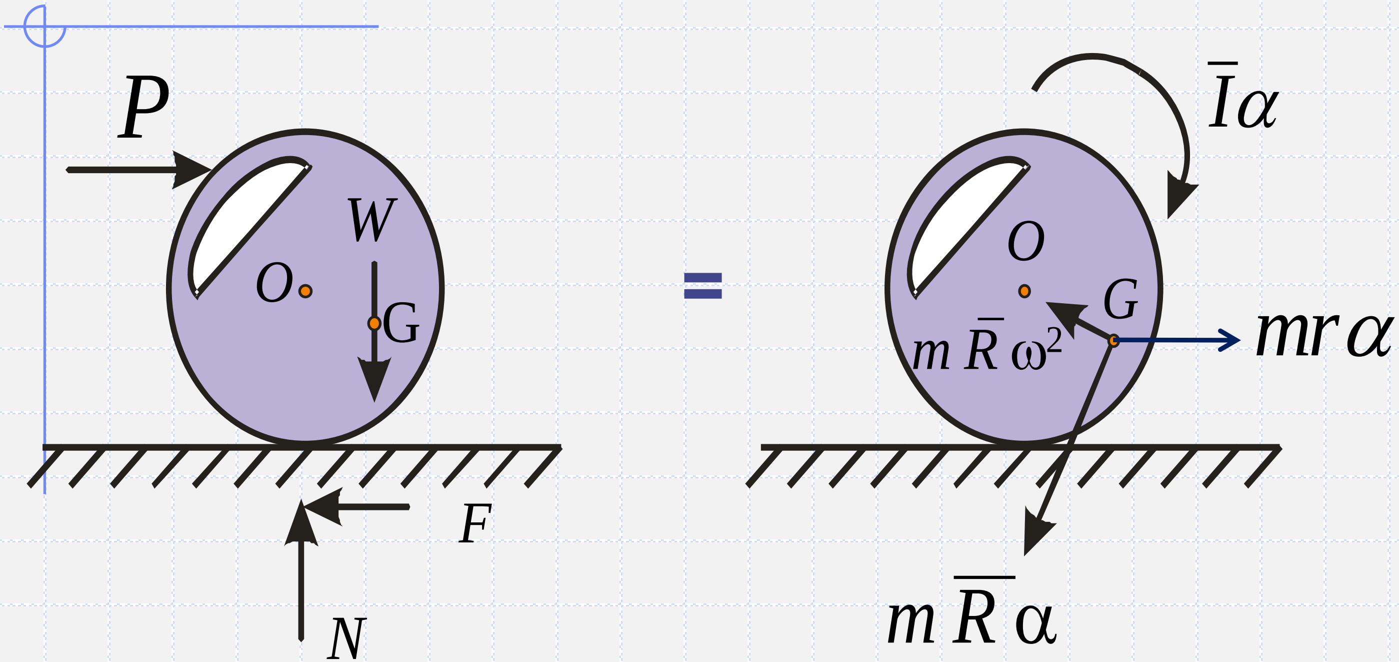


$$\boxed{\bar{a} \neq r\alpha}$$

$$\boxed{F_k = \mu_k N}$$

۴) دیسک نامتعادل:

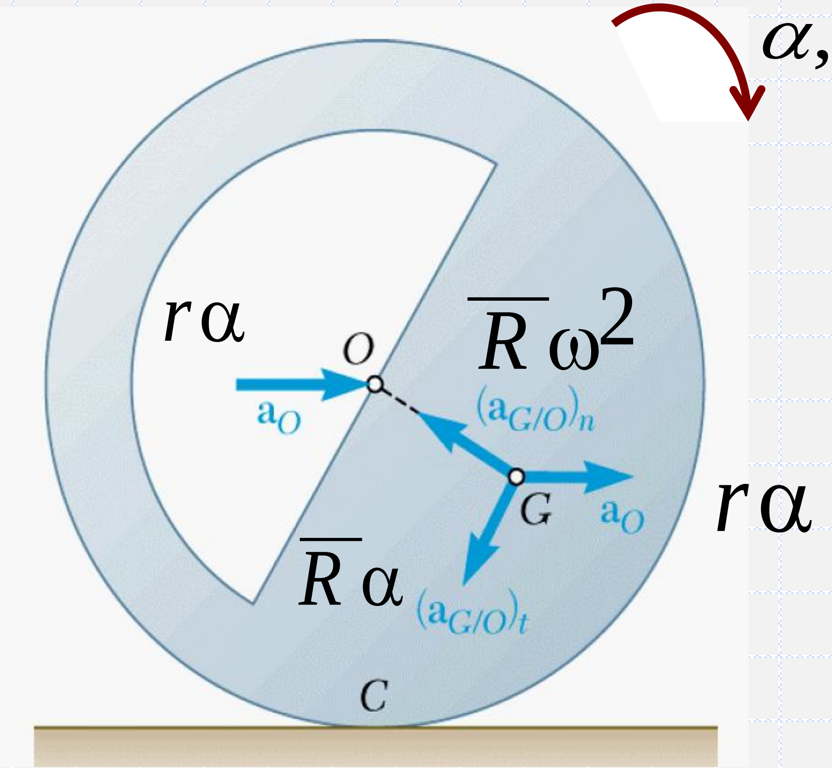
جرم در مرکز هندسی دیسک قرار ندارد .



$$\boxed{\begin{aligned} x_o &= r\theta \\ v_o &= r\omega \\ a_o &= r\alpha \end{aligned}}$$

r = شعاع دیسک

$\bar{R}$ = G تا O فاصله



$$\vec{\bar{a}}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O}$$

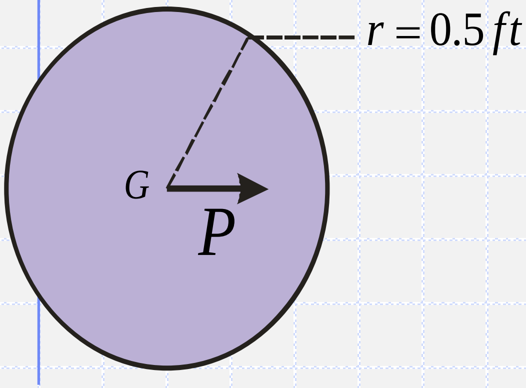
$$\vec{a}_O = \left[r\alpha \rightarrow \right]$$

$$\vec{a}_G = (r\alpha \rightarrow) + (\bar{R}\alpha \swarrow) + (\bar{R}\omega^2 \nwarrow)$$

مثال: مطلوبست شتاب و شتاب زاویه ای دیسک مقابل. (صفحه قائم)

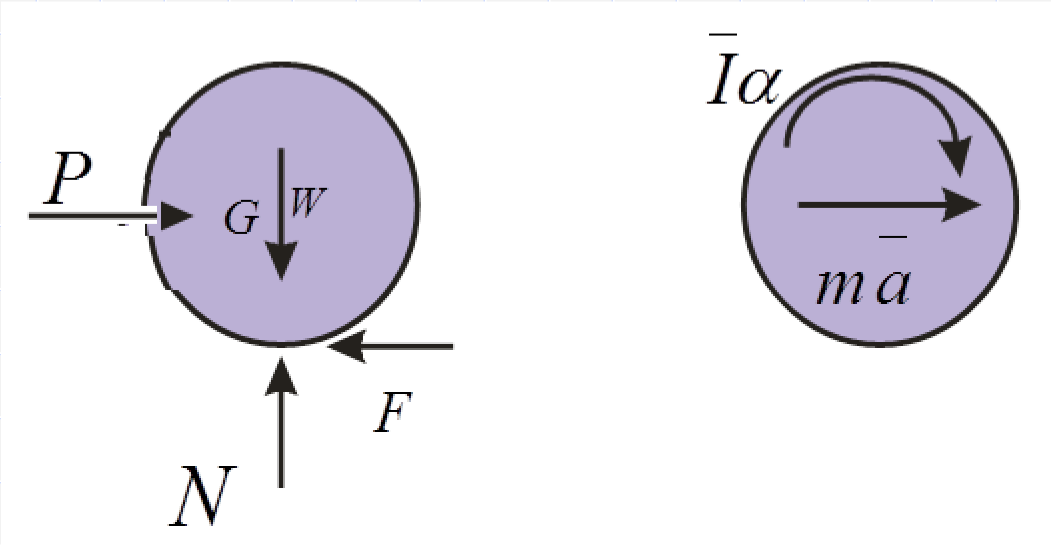
$\bar{a} = ?$ $\alpha = ?$ $P = 40\,(lb)$ $W = 50\,(lb)$

$\mu_s = 0.2$, $\mu_k = 0.15$



حل:

اگر مسئله نگوید غلتش یا لغزش،
فرض می‌شود که غلتش بدون لغزش است.



$$\boxed{\begin{aligned}\bar{a} &= r\alpha \\ \Sigma M_C &= (\Sigma M_C)_{eff}\end{aligned}}$$

$$\Sigma M_C = (\Sigma M_C)_{eff}$$

$$P \times r = \bar{I}\alpha + m\bar{a}\,r$$

$$40(0.5) = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)(0.5)^2 + \frac{50}{32.2}(0.5)^2\alpha$$

$$\alpha = 34.25 \quad (rad/s^2)$$

$$\xrightarrow{+}\Sigma F = \xrightarrow{+}(\Sigma F)_{eff} \quad \Rightarrow \quad P - F = m\bar{a} = mr\alpha$$

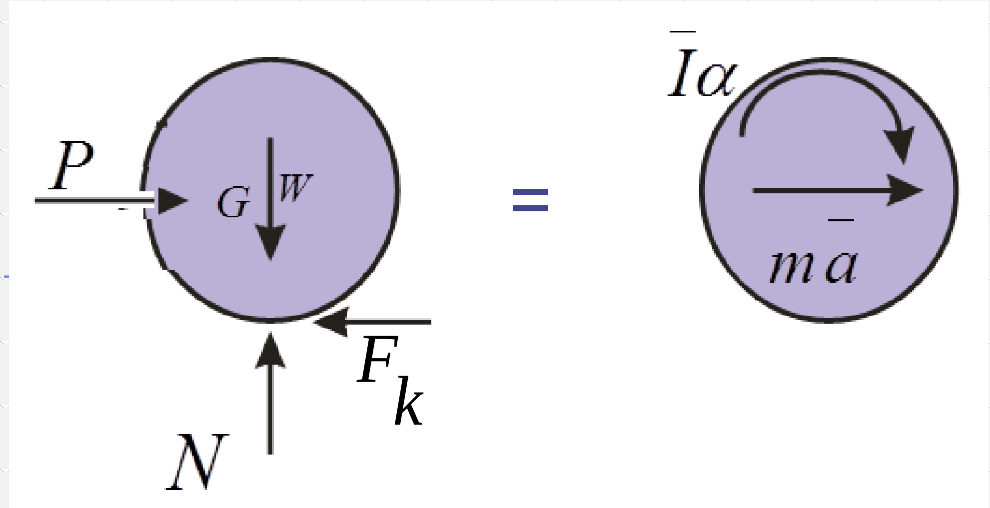
$$40 - F = \frac{50(0.5)(34.35)}{32.2} \quad \Rightarrow \quad F = 13.33\,(lb)$$

حال باید کنترل کنیم تا ببینیم فرض که کردیم درست است یا خیر ؟

$$F_{max} = \mu_s N = 0.2 \times 50 = 10\ (lb)$$

$$F_{max} = 10 < F = 13.33\ (lb)$$

پس لغزش داریم



$\boxed{\bar{a} \neq r\alpha}$

$\boxed{F_k = \mu_k N}$

گشتاور حول مرکز دیسک (محل عبور نیروی P) :

$$F_k \times r = \bar{I}\,\alpha$$

$$0.15(50)(0.5) = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)(0.5)^2\alpha$$

$$\alpha = 19.32 \quad (rad/s^2)$$

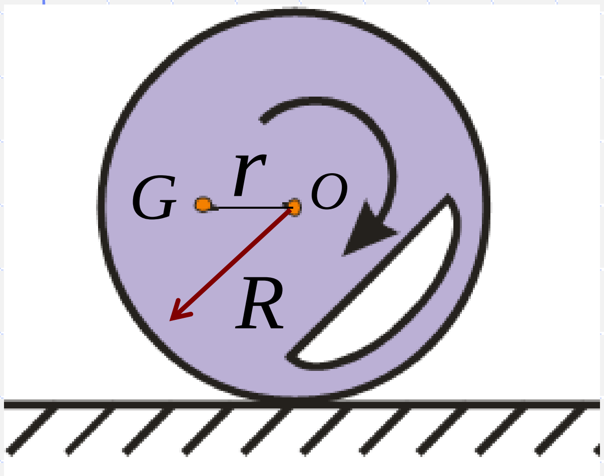
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = (\Sigma F_x)_{eff}$$

$$P - F_k = m\bar{a} \;\Rightarrow\; 40 - 0.15(50) = \frac{50}{32.2}(\bar{a}) \;\Rightarrow\; \bar{a} = 20.93 \quad (ft/s^2)$$

مثال: دیسک نا متعادل در حال غلتش بدون لغزش است،

مطلوبست : $\alpha = ?$

$\omega = 8 \ rad/s$



$r = 100 \ mm$

$R = 300 \ mm$

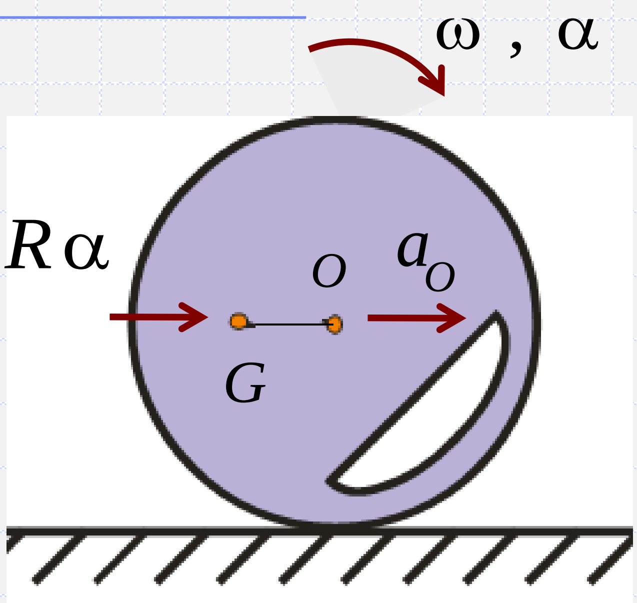
$m = 5 \ kg$

$\bar{k} = \sqrt{\frac{\bar{I}}{m}} = 150 \ mm$ ژیراسیون جرم

حل :

$$\vec{a}_O = \left[R\alpha \rightarrow \right]$$

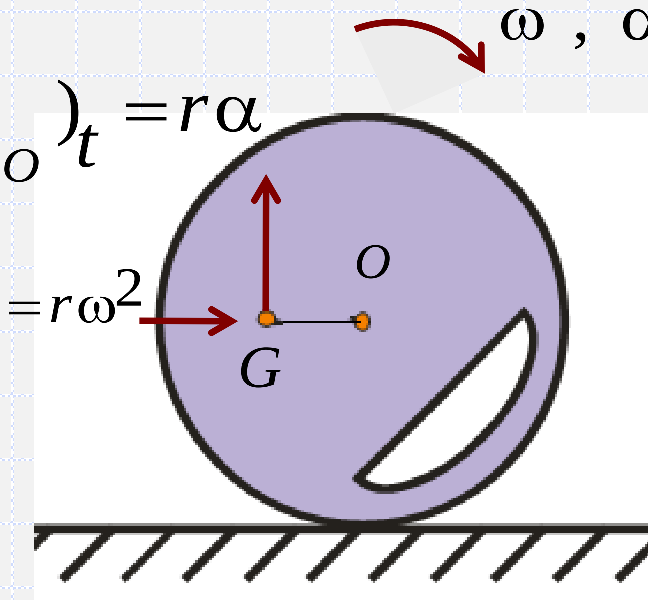
$$a_O = R\alpha$$



$$(a_{G/O})_t = r\alpha$$

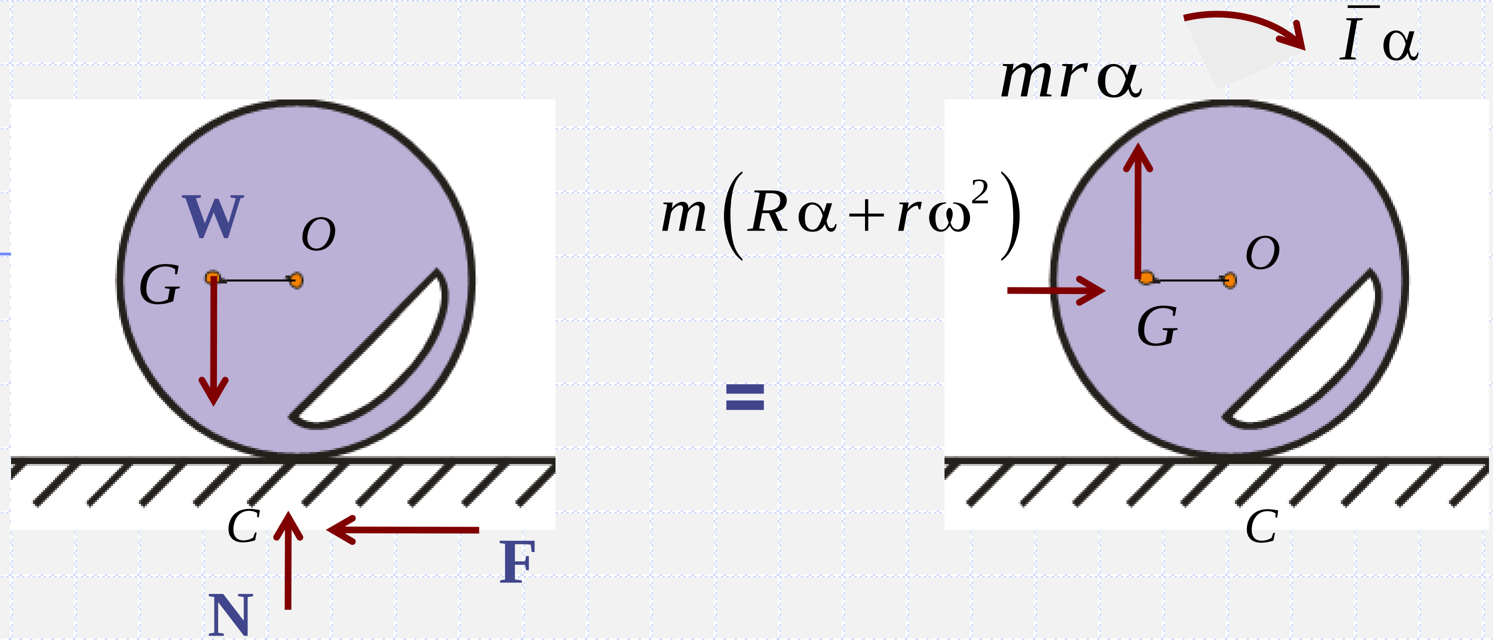
$$(\vec{a}_{G/O})_n = r\omega^2$$

+



$$\vec{\bar{a}}_G = \vec{\bar{a}} = \vec{a}_O + (\vec{a}_{G/O})_n + (a_{G/O})_t$$

$$\vec{a}_G = \vec{\bar{a}} = \left[R\alpha \rightarrow \right] + \left[r\omega^2 \rightarrow \right] + \left[r\alpha \uparrow \right]$$



$$\Sigma M_C = (\Sigma M_C)_{eff}$$

$$W \times r = -\bar{I}\alpha - mr\alpha \times r - m(R\alpha + r\omega^2) \times R$$

$$W \times r = -m\bar{k}^2\alpha - mr^2\alpha - mR^2\alpha - mrR\omega^2$$

$$5g(0.1) = -5\left[(0.15)^2 + (0.1)^2 + (0.3)^2 + (0.1)(0.3)(8)^2\right]$$

$$\alpha = -23.7 \;(rad/s^2)$$